Prof. Dr. M. Rapoport
Dr. E. Hellmann SS 2012

Lineare Algebra II

Übungsblatt 6

Abgabe 18.05.2012

Aufgabe 1:
Berechne die Iwasawa-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R}).$$

Aufgabe 2:
Sei

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4-i & 2+i & -2-i \\ 2+i & 4-i & 2+i \\ -2-i & 2+i & 4-i \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{C}).$$

Finde eine Matrix $U \in U(3)$, so dass ${}^t\overline{U}AU$ eine Diagonalmatrix ist.

Aufgabe 3:
Sei f ein Endomorphismus eines unitären $\mathbb{C}$-Vektorraums V.

(i) Sei $f \circ f = \mathrm{id}_V$. Zeige, dass f genau dann unitär ist, wenn f selbstadjungiert ist.

(ii) Sei f ein Projektor, d.h. $f \circ f = f$. Zeige, dass $V = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$, und dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

  (a) $\operatorname{Ker} f \perp \operatorname{Im} f$, d.h. alle Vektoren aus $\operatorname{Ker} f$ stehen senkrecht auf allen Vektoren aus $\operatorname{Im} f$,

  (b) f ist selbstadjungiert,

  (c) f ist normal.

Aufgabe 4:
Sei V ein unitärer Vektorraum und f ein Endomorphismus von V. Sei f^* die zu f adjungierte Abbildung. Zeige:

(i) Es gilt $\mathrm{Spur}(f \circ f^*) \geq 0$,

(ii) In (i) gilt Gleichheit genau dann, wenn f die Nullabbildung ist.

Homepage: `www.math.uni-bonn.de/people/hellmann/LA_II`