Prof. Dr. M. Rapoport
Dr. E. Hellmann SS 2012

Lineare Algebra II

Übungsblatt 1

Abgabe 13.04.2012

Aufgabe 1:
Sei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & 2 & -8 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & 6 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{Q}).$$

(i) Bestimme die Eigenwerte von A.

(ii) Bestimme Basen der verallgemeinerten Eigenräume $V(\lambda, A)^{\text{all}}$ für jeden Eigenwert λ von A.

Aufgabe 2:
Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum und sei $f : V \to V$ eine lineare Abbildung. Es gelte $f^k = \mathrm{id}_V$ für ein $k \geq 1$. Für $j = 1, \dots, k$ setzen wir:

$$\lambda = \exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{k}\right) \in \mathbb{C}, \qquad P_j(X) = \frac{1}{k}\sum_{l=1}^{k} \lambda^{jl} X^{k-l} \in \mathbb{C}[X].$$

Zeige:

(i) $1 = P_1(X) + P_2(X) + \cdots + P_k(X)$.

(ii) $\mathrm{Im}(P_j(f)) = V(f, \lambda^j)$.

(iii) Jeder Vektor $v \in V$ lässt sich in eindeutiger Weise als Summe $v = v_1 + \dots v_k$ mit $v_j \in V(f, \lambda^j)$ schreiben. Mit anderen Worten: $V = \bigoplus_{j=1}^{k} V(f, \lambda^j)$.

Aufgabe 3:
Sei K ein Körper und $n \geq 2$. Eine Matrix $C \in M_n(K)$ heißt *nilpotent*, falls $C^N = 0$ für ein $N \in \mathbb{N}$ gilt. Seien $A, B \in M_n(K)$. Zeige:

(i) Ist AB nilpotent, so auch BA.

(ii) Sind A und B nilpotent und gilt $AB = BA$, so sind auch $A + B$ und AB nilpotent.

(iii) Es gibt nilpotente Matrizen A und B, so dass $A + B$ und AB nicht nilpotent sind.

(iv) Ist A nilpotent und diagonalisierbar, so gilt $A = 0$.

Homepage: `www.math.uni-bonn.de/people/hellmann/LA_II`