Prof. Dr. M. Rapoport
Dr. E. Hellmann SS 2012

Lösungsskizze zur Klausur Lineare Algebra II

Aufgabe 1:

(i) Es gilt $\chi_A(X) = (X-1)^2(X-2)$ und

$$\mathrm{rg}(E-A) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} = 2.$$

Folglich ist die Jordansche Normalform

$$\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 1 & 1 \\ & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(ii) (a) $\mu_f(X) = (X+2)^2(X-1)^2$.

(b) Die möglichen Jordanschen Normalformen sind

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & & & & \\ 0 & 1 & & & & \\ & & -2 & 1 & & \\ & & 0 & -2 & & \\ & & & & -2 & \\ & & & & & -2 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & & \\ 0 & 1 & & & & \\ & & -2 & 1 & & \\ & & 0 & -2 & & \\ & & & & -2 & 1 \\ & & & & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2:

Die Polarzerlegung ist

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ -3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{S}.$$

In der Tat gilt $S \in O(3, \mathbb{R})$ da die Spaltenvektoren von S eine Orthonormalbasis bilden. Ferner ist P offenbar symmetrisch und positiv definit (da z.B. alle Hauptminoren positiv sind).

Die Matrix P erhält man z.B. als symmetrisch positiv definite Wurzel der symmetrischen positiv definiten Matrix

$${}^{t}AA = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 6 \\ 0 & 4 & 0 \\ 6 & 0 & 10 \end{pmatrix},$$

oder alternativ durch geschickte Permutation (und Vorzeichenänderung) der Spalten von A.

Aufgabe 3:

Es sei $e_1, \dots, e_n$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$. Wir unterscheiden die folgenden Fälle:

> $n = 2k$ gerade: In diesem Fall betrachten wir für $i = 1, \dots, k$ die hyperbolischen Ebenen $\mathbb{H}_i = \langle e_i, e_{n-i+1} \rangle$. Diese hyperbolischen Ebenen liefern eine orthogonale Zerlegung
>
> $$(\mathbb{R}^n, \beta) \cong \mathbb{H}_1 \perp \cdots \perp \mathbb{H}_k.$$
>
> Die Signatur einer hyperbolischen Ebene ist $(1, 1)$. Demnach ist die Signatur von β genau $(k, k) = (\frac{n}{2}, \frac{n}{2})$.
>
> $n = 2k + 1$ ungerade. Wie oben betrachten wir für $i = 1, \dots, k$ die hyperbolischen Ebenen $\mathbb{H}_i = \langle e_i, e_{n-i+1} \rangle$. Dies liefert eine orthogonale Zerlegung
>
> $$(\mathbb{R}^n, \beta) \cong \mathbb{H}_1 \perp \cdots \perp \mathbb{H}_k \perp \langle e_{k+1} \rangle.$$
>
> Der Signaturtyp von β ist also in diesem Fall $(k + 1, k) = (\frac{n+1}{2}, \frac{n-1}{2})$.

Aufgabe 4:

Laut einer Übungsaufgabe gibt es zu einem trigonalisierbaren Endomorphismus f genau dann einen zyklischen Vektor, wenn alle Eigenräume von f ein-dimensional sind.

Sei f trigonalisierbar und sei V zyklisch. Dann ist die Einschränkung $g = f|_U : U \to U$ ebenfalls trigonalisierbar. Sei $\lambda \in K$ ein Eigenwert von g, dann ist λ auch Eigenwert von f und es gilt $V(\lambda, g) \subset V(\lambda, f)$. Es folgt $1 \leq \dim V(\lambda, g) \leq \dim V(\lambda, f) = 1$. Somit sind alle Eigenräume von g ein-dimensional. Also besitzt $g = f|_U$ einen zyklischen Vektor.

Alternative Lösung: Sei $v \in V$ ein f-zyklischer Vektor. Betrachte die Flagge

$$0 \subsetneq \underbrace{\langle v \rangle}_{V_1} \subsetneq \underbrace{\langle v, f(v) \rangle}_{V_2} \subsetneq \underbrace{\langle v, f(v), f^2(v) \rangle}_{V_3} \subsetneq \cdots \subsetneq \underbrace{\langle v, f(v), \dots, f^{n-1}(v) \rangle}_{V_n} = V.$$

Dann gilt $\dim V_i = i$ und $V_{i+1} = V_i + f(V_i)$. Sei $U \subset V$ ein f-stabiler Unterraum der Dimension k. Wir setzen $U_i = V_i \cap U$. Sei l der kleinste Index, so dass $U_l \neq 0$, dann ist $U_l = \langle w \rangle$ für einen Vektor $w \in U$. Wir zeigen: $U = \langle w, f(w), \dots, f^{k-1}(w) \rangle$ und damit übrigens insbesondere $l = n - k + 1$.

Sei $x \in U_i \backslash U_{i-1}$ für $i \geq l$. Dann ist $f(x) \in U_{i+1} \backslash U_i$. Andernfalls wäre $f(x) \in V_i$ und somit $x \in V_{i-1}$, da $f|_{V_i} : V_i \to f(V_i)$ und $f|_{V_{i-1}} : V_{i-1} \to f(V_{i-1})$ Isomorphismen sind, Widerspruch.
Es folgt, dass $U_{i+1} = U_i + f(U_i)$ für $i \geq l$, da $\dim U_{i+1} - \dim U_i \in \{0, 1\}$. Insbesondere wird $U = U_n$ von $w, f(w), \dots f^{k-1}(w)$ erzeugt.

Aufgabe 5:

(i) Beweis durch Induktion nach $n = \dim V$.

> $n = 1$: In diesem Fall gilt $V_1 = V = \langle v \rangle$ für ein $0 \neq v \in V$. Mit $v' = \frac{1}{||v||} v$ gilt
>
> $$||v'|| = 1 \text{ und } V_1 = V = \langle v' \rangle.$$
>
> $n - 1 \to n$: Nach Induktionsvoraussetzung gibt es eine Orthonormalbasis $b_1, \dots, b_{n-1}$ von V_{n-1}, sodass $V_i = \langle b_1, \dots, b_i \rangle$ für $i = 1, \dots, n - 1$. Wir ergänzen $b_1, \dots, b_{n-1}$ mit v zu einer Basis von V. Sei
>
> $$b'_n = v - \sum_{i=1}^{n-1} (v, b_i) b_i.$$

Dann gilt

$$(b'_n, b_i) = (v, b_i) - \sum_{j=1}^{n-1}(v, b_j)(b_j, b_i) = (v, b_i) - (v, b_i) = 0$$

für $i = 1, \ldots, n-1$. Und ferner

$$V = V_n = \langle b_1, \ldots, b_{n-1}, v\rangle = \langle b_1, \ldots, b_{n-1}, b'_n\rangle.$$

Mit $b_n = \frac{1}{||b'_n||} b'_n$ ist $b_1, \ldots, b_n$ die gesuchte Orthonormalbasis.

(ii) Da f trigonalisierbar ist, gibt es eine vollständige Flagge

$$0 = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq \cdots \subsetneq V_n = V$$

von f-invarianten Unterräumen.
Nach Aufgabenteil (i) gibt es eine Orthonormalbasis $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ mit $V_i = \langle b_1, \ldots, b_i\rangle$.
Es folgt, dass $c_B^B(f)$ eine obere Dreiecksmatrix ist.

Aufgabe 6:
Nach Vorlesung gibt es eine orthogonale Zerlegung

$$V = \mathbb{H}_1 \perp \mathbb{H}_2 \perp \cdots \perp \mathbb{H}_r \perp (W, \gamma)$$

wobei $r = \dim U$ die Dimension eines maximal isotropen Teilraumes ist. Ferner sind $\mathbb{H}_1, \ldots, \mathbb{H}_r$ hyperbolische Ebenen und (W, γ) besitzt keinen isotropen Vektor.
Die Signatur eine hyperbolischen Ebene $\mathbb{H}$ ist $(1, 1)$.
Sei (p', q') die Signatur von (W, γ), dann gilt $p' = 0$ oder $q' = 0$:
Nach dem Trägheitssatz gibt es eine orthogonale Zerlegung $W = W^+ \perp W^-$ wobei $\gamma|_{W^+ \times W^+}$ positiv definit und $\gamma|_{W^- \times W^-}$ negativ definit ist. Falls $W^+, W^- \neq 0$, so gibt es Vektoren $0 \neq v_1 \in W^+$ und $0 \neq v_2 \in W^-$ mit $\gamma(v_1, v_1) = 1 = -\gamma(v_2, v_2)$. In diesem Fall ist $0 \neq v_1 + v_2 \in W$ ein isotroper Vektor. Widerspruch. Also gilt $W^+ = 0$ oder $W^- = 0$.

Für die Signatur von V folgt $(p, q) = (r + p', r + q')$, also $r = \min(p, q)$.