Dr. E. Viehmann WS 2009/10

Algebra II – Kommutative Algebra

5. Übungsblatt

Aufgabe 1:
Sei k ein Körper und $A = k[X, Y, Z]$. Sei $\mathfrak{p}_1 = (X, Y)$ und $\mathfrak{p}_2 = (Y, Z)$. Bestimmen Sie eine kürzeste Primärzerlegung von $\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2$. Welche Komponenten sind isoliert und welche eingebettet?

Aufgabe 2:
Sei A ein Ring und G eine endliche Gruppe von Automorphismen von A. Sei A^G der Unterring der G-invarianten Elemente, also der $x \in A$ mit $\sigma(x) = x$ für alle $\sigma \in G$.

a) Zeigen Sie, daß A ganz über A^G ist.

b) Sei $S \subseteq A$ eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge mit $\sigma(S) = S$ für alle $\sigma \in G$. Sei $S^G = S \cap A^G$. Zeigen Sie, daß sich die G-Operation von A auf $S^{-1}A$ fortsetzen läßt und daß $(S^G)^{-1}A^G \cong (S^{-1}A)^G$.

Aufgabe 3:
Sei $m \in \mathbb{Z}$ quadratfrei und A der ganze Abschluß von $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Q}[\sqrt{m}]$. Zeigen Sie, daß

$$A = \begin{cases} \mathbb{Z}[(1+\sqrt{m})/2] & \text{falls } m \equiv 1 \pmod 4 \\ \mathbb{Z}[\sqrt{m}] & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hinweis: Betrachten Sie die Minimalpolynome.

Aufgabe 4:
Sei A ein noetherscher Ring, und sei $A_\mathfrak{p}$ ein Ganzheitsring für alle $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$. Seien $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n$ die minimalen Primideale von A. Zeigen Sie

a) $\operatorname{Ass}(A) = \{\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n\}$

b) $\mathfrak{p}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{p}_n = \operatorname{nil}(A) = (0)$

c) $\mathfrak{p}_i + \bigcap_{i \neq j} \mathfrak{p}_j = A$ für alle i

d) $A \cong A/\mathfrak{p}_1 \times \dots \times A/\mathfrak{p}_n$.

Abgabe: Donnerstag, 19. November 2009.

Homepage:
http://www.math.uni-bonn.de/people/viehmann/kommalg/