Prof. Dr. M. Rapoport
Dr. U. Görtz **SS 2004**

Lineare Algebra II

8. Übungsblatt

Abgabe: Dienstag, 22.06.2004 in der Vorlesung

Aufgabe 1

Sei f ein nilpotenter Endomorphismus des Vektorraums V.

a) Sei $v \in \operatorname{im} f \setminus \{0\}$ und sei $U \subseteq V$ der von v erzeugte f-zyklische Unterraum. Zeige, dass U kein f-invariantes Komplement in V besitzt.

b) Gib ein Beispiel für V, f, und $v \in V \setminus \operatorname{im} f$ an, so dass der von v erzeugte f-zyklische Unterraum kein f-invariantes Komplement besitzt.

Aufgabe 2

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & -1 \\ -6 & -1 & -6 & -2 \\ 4 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R}).$$

a) Finde einen Vektor $v \in \mathbb{R}^4$, so dass die Vektoren $v_i = A^i v$, $i = 0, 1, 2, 3$, linear unabhängig sind und stelle $v_4 = A^4 v$ als Linearkombination von v_0, v_1, v_2 und v_3 dar.

b) Bestimme mit Hilfe des Ergebnisses in a) das Minimalpolynom und das charakteristische Polynom von A.

c) Zerlege χ_A in Linearfaktoren, berechne Basen der verallgemeinerten Eigenräume von A und bestimme eine Matrix $S \in GL_4(\mathbb{R})$, so dass $S^{-1}AS$ Jordansche Normalform hat.

Aufgabe 3

Sei K ein Körper und $n \geq 1$.

a) Für $n \in N$, $\lambda \in K$ sei

$$J_n(\lambda) = \left\{ (a_{ij}) \in M_n(K) \;\middle|\; \begin{array}{l} a_{ij} = 0 \text{ für } i > j \\ a_{ii} = \lambda \text{ für alle } i \\ a_{ij} \neq 0 \text{ für } i = j - 1 \end{array} \right\}$$

Zeige, dass je zwei Matrizen aus $J_n(\lambda)$ ähnlich zueinander sind.

b) Sei nun $K = \mathbb{C}$ und $\det A \neq 0$. Zeige, dass man für $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$, die Jordansche Normalform von A^k dadurch erhält, dass man in der Jordanschen Normalform von A die Diagonalelemente durch ihre k-ten Potenzen ersetzt.

c) Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum und $\varphi\colon V \longrightarrow V$ eine bijektive lineare Abbildung. Für ein $k > 0$ sei φ^k diagonalisierbar. Ist auch φ diagonalisierbar?

d) Gilt die Aussage in b) auch ohne die Voraussetzung $\det A \neq 0$? Gilt sie, wenn $K = \mathbb{F}_2$ ist?

Aufgabe 4

Sei K ein Körper, und sei $f(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots a_1 X_1 + a_0 \in K[X]$ ein normiertes Polynom, so dass

$$f(X) = \prod_{i=0}^{k} (X - \lambda_i)^{r_i}$$

mit paarweise verschiedenen $\lambda_i \in K$. Bestimme die Jordansche Normalform der sogenannten Begleitmatrix

$$A = A(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_3 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in M_n(K)$$

von f.