Prof. Dr. M. Rapoport
Dr. U. Görtz **SS 2004**

Lineare Algebra II

3. Übungsblatt

Abgabe: Dienstag, 11.05.04 in der Vorlesung

Aufgabe 1

Berechne die Iwasawa-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{R}).$$

Aufgabe 2

Identifiziere $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$ und betrachte für $n \geq 3$ das Element $\zeta_n = \exp\left(\frac{2\pi i}{n}\right) \in \mathbb{C}$. Dann ist $P_n = \{\zeta_n^k;\ k = 0, \ldots, n-1\}$ die Menge der Ecken eines regelmäßigen n-Ecks. Sei

$$D_n = \{g \in GL_2(\mathbb{R});\ g(P_n) = P_n\}$$

die Symmetriegruppe dieses n-Ecks.

a) Zeige, dass $D_n \subseteq O(2, \mathbb{R})$.

b) Zeige: Die Gruppe D_n hat $2n$ Elemente. Gib die entsprechenden Matrizen explizit an. Zeige, dass n dieser Elemente Drehungen sind. Wie sind die anderen n Elemente geometrisch zu interpretieren?

Aufgabe 3

Sei V ein unitärer Vektorraum. Zeige: $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ ist genau dann unitär, wenn für alle $v \in V$ gilt, dass $||\varphi(v)|| = ||v||$.

Aufgabe 4

Sei f ein Endomorphismus eines unitären $\mathbb{C}$-Vektorraums V.

a) Sei $f \circ f = \mathrm{id}_V$. Zeige, dass f genau dann unitär ist, wenn f selbstadjungiert ist.

b) Sei f ein Projektor, d. h. $f \circ f = f$. Zeige, dass $V = \ker f \oplus \mathrm{im}\, f$, und dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

i) $\ker f \perp \mathrm{im}\, f$,

ii) f ist selbstadjungiert,

iii) f ist normal.