Abgabefrist: Freitag 8.1. um 12:00 Uhr.

Aufgabe 1 (Cauchy-Produkt-Formel). In dieser Aufgabe betrachten wir ein Gegenbeispiel zu der Cauchy-Produkt-Formel im Fall der nur bedingt konvergenten Reihen. Sei $a_n := (-1)^n/\sqrt{n+1}$ für $n \in \mathbb{N}$.

(a) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_n a_n$ in $\mathbb{R}$ konvergiert aber *nicht* absolut konvergiert. (2 Pkt.)

(b) Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_k \sum_{j=0}^{k} a_j a_{k-j}$$

nicht konvergiert. (3 Pkt.)

Aufgabe 2 (Unstetige Funktion). Für $r \in \mathbb{Q}$ definieren wir

$$q_r := \min\{q \in \mathbb{N}_{\geq 1} \mid (\exists p \in \mathbb{Z})\, r = p/q\}.$$

(Das heißt, wir wählen q_r so, dass die Darstellung $r = p/q_r$ teilerfremd ist.) Sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) := \begin{cases} 1/q_x, & \text{falls } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

(a) Sei $a \in \mathbb{Q}$. Zeigen Sie, dass f nicht stetig ist in a. (4 Pkt.)

(b) Sei $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Zeigen Sie, dass f stetig ist in a. (6 Pkt.)

Hinweis: Zeigen Sie zuerst dass $\inf_{p\in\mathbb{N}} |a - p/q| > 0$ für jedes $q \in \mathbb{N}_{\geq 1}$.

Aufgabe 3 (Zwischenwertsatz). (a) Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Beweisen Sie, dass

$$[f(a), f(b)] \subseteq f([a,b]).$$

(2 Pkt.)

(b) Seien $a < b \in \mathbb{R}$ und $f\colon [a,b] \to [a,b]$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass f einen *Fixpunkt* besitzt; das heißt, es existiert ein $x \in [a,b]$ mit $f(x) = x$. (2 Pkt.)

(c) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) := \exp(x) + x\exp(-x)$. Zeigen Sie, dass f mindestens eine Nullstelle hat; das heißt, es existiert $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = 0$. (2 Pkt.)

(d) Sei $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(0) = f(1)$ und $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Zeigen Sie, dass es ein $x \in [0, 1-1/n]$ gibt mit $f(x) = f(x+1/n)$. (4 Pkt.)

Aufgabe 4 (Sinus und Kosinus). Benutzen Sie in dieser Aufgabe nur die Definition von sin und cos (Definition 7.36), die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion, die Definition von π (Definition 7.38), und die Gleichheiten $\cos(\pi/4) = \sin(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$.

(a) Beweisen Sie für alle $z \in \mathbb{C}$ die Gleichungen

$$\exp(iz) = \cos(z) + i\sin(z), \qquad \exp(-iz) = \cos(z) - i\sin(z), \qquad (\cos z)^2 + (\sin z)^2 = 1.$$

(2 Pkt.)

(b) Beweisen Sie für alle $x, y \in \mathbb{C}$ die Gleichungen

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y), \qquad \cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y). \quad \text{(3 Pkt.)}$$

Schlussfolgern Sie hieraus die Verdopplungssätze

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x), \qquad \cos(2x) = 2(\cos x)^2 - 1. \quad \text{(1 Pkt.)}$$

(c) Beweisen Sie für alle $x, y \in \mathbb{C}$ die Gleichungen

$$\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}, \qquad \cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}. \quad \text{(4 Pkt.)}$$

(d) Beweisen Sie die folgenden Gleichungen: (5 Pkt.)

$$\begin{aligned} \cos(\pi/2) &= 0, & \sin(\pi/2) &= 1, \\ \sin(x+\pi/2) &= \cos(x), & \sin(x+\pi) &= -\sin(x), \\ \cos(x+\pi) &= -\cos(x), & \sin(x+2\pi) &= \sin(x), \\ \cos(x+2\pi) &= \cos(x), & \exp(i\pi/2) &= i, \\ \exp(i\pi) &= -1, & \exp(2\pi i) &= 1. \end{aligned}$$